INDICE (APPROSSIMATIVO)

Induzione	3
Insiemi e logica	11
Numeri reali	13
Rappresentazioni decimali	21
Radici, potenze, logaritmi	26
Serie geometrica	28
Funzioni	29
Successioni	40
Medie	55
Criterio della radice	55
Limiti	64
Teoremi di confronto	69
Limiti notevoli	70
Funzioni continue	74
Funzioni elementari	77
Numeri complessi	80
Funzioni derivabili (derivate)	82
Grafici di funzioni	105
Integrazione	110
Lunghezza di una curva	121
Equazioni differenziali	136
Prove di esame	167
Teorema degli zeri	223
Teorema di Torricelli-Barrow	224

Vari esercizi sono sparsi all'interno dei corrispettivi argomenti, e i fogli degli esercizi e varie dispense sono scaricabili sul sito del Benedetti

www.dsu.unipi.it/~benedett/bsu13_14.html

(più semplicemente basta cercare benedetti unipi, area didattica, ingegneria biomedica 2013/2014)

In fondo breve appendice di cui consiglio la lettura.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

ANALISI MATEMATICA

R. Benedetti
F. Broglia

INSIEME dei NUMERI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ insieme dei numeri naturali

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1, 2 \dots\}$ insieme dei numeri interi

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid q, p \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ MCD(p, q) = 1 \right\}$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali; in tale insieme si parla di frazioni ridotte ai minimi termini

pensando che $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ per avvalerci di tale teoria possiamo vedere un certo numero $a \in \mathbb{Z}$ come un numero razionale infatti $a = \frac{a}{1}$ dove $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$

Inoltre vi è $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ → sono insiemi ordinati in quanto seguono una RELAZIONE D'ORDINE

le inclusioni sono strette

→ le operazioni rispettano le relazioni d'ordine

ORDINAMENTO SUI RAZIONALI ($\mathbb{Q}$)

$\frac{a}{b} \leq \frac{p}{q}$ se $a \cdot q \leq b \cdot p$

es. $\frac{4}{5} \leq \frac{5}{3}$ infatti $4 \cdot 3 \leq 5 \cdot 5$ $\quad 12 \leq 25$

NOTIAMO: In $\mathbb{N}$ dato un certo n $n+1$ è il successivo e ciò accade pure per $\mathbb{Z}$.

Quindi il SUCCESSIVO è il minimo numero strettamente maggiore di n.

→ In $\mathbb{Q}$ secondo tale definizione non esiste il SUCCESSIVO.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che non esiste il successivo di 0 in $\mathbb{Q}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

prendiamo $0 < \frac{p}{q}$ dove $p > 0$ e $q \cdot 0 < p$

per esempio $0 < \frac{3}{5}$ e cerco un certo numero che si trovi tra 0 e $\frac{3}{5}$.

quindi cerco un $u > 0$ tale che

$$0 < \frac{1}{u} < \frac{p}{q} \longrightarrow \frac{1}{u} < \frac{p}{q} \qquad q < p \cdot u \quad (1)$$

riscrivendo la disequazione (1) $q < p \cdot u$ $\quad \frac{q}{p} < u$

applicando alla frazione la divisione con resto ottengo che

$q = p \cdot u + r$ $\quad r$ è il resto che è $r < p$

quindi posso scrivere

(2) $q = p \cdot u + r < pu + p$ oppure $p(u+1)$

applicando un esempio $0 < \frac{1}{u} < \frac{3}{5}$ dalla divisione ho che $5 = 3 \cdot 1 + 2$

riscrivendo la relazione (2) $5 = 3 \cdot 1 + 2 < 3 \cdot 1 + 3$ e ciò è FALSO

quindi abbiamo dimostrato che in $\mathbb{Q}$ non esiste il SUCCESSIVO

PROPRIETÀ DELL'ORDINAMENTO e LE OPERAZIONI

OPERAZIONI SU $\mathbb{Q}$

$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{p \cdot b + a \cdot q}{q \cdot b}$ con un eventuale riduzione a $\frac{\hat{p}}{\hat{q}}$

$\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} = \frac{p \cdot a}{q \cdot b}$ con eventuale riduzione

PROPRIETÀ DI ORDINAMENTO RISPETTO + e ·

se $a \geq 0$ allora $-a \leq 0$

se $a \geq b$ allora $\forall c \longrightarrow a + c \geq b + c$

se $a \geq b$ allora $\forall c > 0 \longrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

ESEMPI $x + 5 = 0$ ha soluzione in $\mathbb{Z}$ $x = -5$ $\quad 5x = 1$ ha soluzione in $\mathbb{Q}$ $x = 1/5$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

AFFERMIAMO che

$\mathbb{N}$ è ben ordinato, cioè:

1_ l'ordine è TOTALE

2_ dato $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ allora

A ha un elemento minimo a_0 tale che
$a_0 \in A$ e $\forall a \in A \rightarrow a_0 \leq a$

(In $\mathbb{Z}$ ciò non accade)

La dimostrazione per induzione si articola in 2 passi:

1_ dimostrare direttamente che $p(n)$ è vero per $n = n_0$

2_ dimostrare che se n è un generico numero naturale $\geq n_0$ dal fatto che $p(n)$ sia vera ne consegue che $p(n+1)$ è vera

dove $p(n)$ è una proposizione della quale ha senso chiedersi se è vera oppure no $\forall n \geq n_0$

e n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà $p(n)$ sia vera

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

PROVIAMO UNA PRIMA APPLICAZIONE

Th 1) $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

2) Se $P(n)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$ è vera $\Rightarrow P(n+2)$ è vera...

Dato un insieme $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 : P(n) \text{ è falsa} \}$

Usando il buon ordinamento di $\mathbb{N}$ vogliamo dimostrare che $A = \emptyset$ ovvero che non ci sia alcun elemento in A

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

Supponga per assurdo che $A \neq \emptyset$ (abbia elementi)

Allora per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$

$\exists\, a_0$ che è il minimo in A per cui $P(a_0)$ è falsa

inoltre vi è n_0 tale che $P(n_0)$ è vera

e deve essere per definizione di A $n_0 < a_0$